Komplexe Zahlen

Mit linearen Funktionen abbilden.

Datei Nr. [illegible]

Stand 18 November 2023

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik
und Studium

https://mathe-cd.de

Inhalt

Aufgabe 8

Gegeben ist eine komplexe Abbildung der Gaußschen Zahlenebene auf sich selbst

mit der Vorschrift $w = f(z) = (2-i)z - 1 + i$.

a) Diese Abbildung stellt eine Drehstreckung um den Fixpunkt dar.
Bestimmen Sie den Fixpunkt, den Drehwinkel und den Streckfaktor.

b) Geben Sie die Gleichung des Bildes der reellen Achse an.

c) Geben Sie die Gleichung des Bildes des Kreises $|z-1+2i| = 4$ an.

Lösung:

a) **Fixpunkt-Bedingung:** $f(z) = z \Leftrightarrow (2-i)z - 1 + i = z \Leftrightarrow$ (… $z = 1 - i$ … $z_F = 1$

Allgemeine Gleichung: $f(z) = a \cdot z + b$

$|a| = |2-i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ Streck… …or.

$\alpha = \arctan\frac{-1}{2} = -26{,}565^\circ$ d.h. 26,56… …ehwink… … Uhrzeigersin…

Einschub: Darstellung der Abbildungsfunk… …n a… …ffine Abbildung:

$w = (2-i)z - 1 + i \Leftrightarrow$ u… … (…)(x + iy) − 1 …

u … $= 2x + y$ … 2iy − …

… $+ iv = (2x + y - 1)$ … $2y - x + 1)$

Koeffizientenvergleich: … $2x + y - 1$ … $v = -x + 2y + 1$ … $\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ausklammern … 1 … $= \frac{1}{\sqrt{5}}$. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = $ … 1 … $\frac{\ }{\sqrt{5}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}$ … $-\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}}$ … $+ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jetzt ha… … die Spaltenvek… …n der M… …ie Norm 1 (Betrag 1):

… $| = \left|\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = 1, \quad |\vec{b}| = \ldots = 1$

Die Matrix gehör… … zu… …er Drehung um den Winkel φ mit $\left\{\begin{matrix} \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{matrix}\right\}$

φ liegt im 4. Feld: $\varphi = 360^\circ - 26{,}565^\circ = 333{,}435^\circ$

Zusätzlich wird eine zentrische Streckung mit dem Faktor $k = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (Stauchung) ausgeführt.

Das Ganze vom Fixpunkt $F(1|0)$ aus.

Ergebnis: f ist eine Drehstreckung, also eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der ein Kreis in einen Kreis und eine gerade in eine Gerade abgebildet wird.

b) Geben Sie die Gleichung des Bildes der reellen Achse an.

1. Lösung: Die reelle Achse wird um den Fixpunkt $F(1|0)$ um α gedreht. Für den Drehwinkel gilt:

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{2}$. Da F auf dem Urbild x-Achse liegt, geht die Bildgerade durch F:

Bildgerade: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

(Bei dieser Rechnung wurden die z-Ebene und die w-Ebene aufeinandergelegt.)

2. Lösung: Die Abbildungsgleichung lässt sich aufspalten in

$$u + iv = (2-i)(x+iy) - 1 + i \Leftrightarrow u + iv = (2x+y-1) + i\cdot(-x+2y+1)$$

d. h. $\begin{cases} u = 2x + y - 1 & (1) \\ v = -x + 2y + 1 & (2) \end{cases}$

Urgerade $y = 0$ einsetzen: $\begin{cases} u = 2x - 1 & \Rightarrow x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \\ v = -x + 1 & \Rightarrow v = -\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow \boxed{v = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}} \end{cases}$

c) Geben Sie die Gleichung des Bildes des Kreises $|z-1+2i| = 4$ an.

1. Methode: Unter Kenntnis der Ähnlichkeitsabbildung:

$|z-1+2i| = 4 \Leftrightarrow |z-(1-2i)| = 4$ also ist der Kreismittelpunkt $M(1|-2)$ und r = 4.

Bei einer Ähnlichkeitsabbildung wird ein Kreis auf einen Kreis abgebildet.

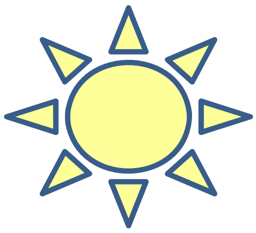
Also berechnet man den Bildpunkt M', der Kreisradius wird mit dem Faktor $\sqrt{5}$ gestreckt.

$f(1-2i) = (2-i)(1-2i) - 1 + i = (2-2-1) + i\cdot(-1-4+1) = \boxed{-1-4i = z_M'}$

Kreisradius: $r' = 4\sqrt{5}$ Bildkreis: $|z - z_{M'}| = r'$ $\boxed{|z+1+4i| = 4\sqrt{5}}$

2. Methode: Mit Bestimmung der Umkehrabbildung

$w = (2-i)z - 1 + i \Leftrightarrow (2-i)z = w + 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{w}{2-i} + \frac{1-i}{2-i}$



Einsetzen in die Kreisgleichung: $\boxed{|z-1+2i| = 4}$

ergibt $\left|\frac{w}{2-i} + \frac{1-i}{2-i} - 1 + 2i\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\frac{w}{2-i} + \frac{1-i}{2-i} + \frac{(-1+2i)(2-i)}{2-i}\right| = 4$

$$\left|\frac{w}{2-i} + \frac{1-i}{2-i} + \frac{-2+2+4i+i}{2-i}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\frac{w+1+4i}{2-i}\right| = 4 \Leftrightarrow \frac{|w+1+4i|}{|2-i|} = 4 \Leftrightarrow \frac{|w+1+4i|}{\sqrt{5}} = 4$$

Ergebnis: Der Bildkreis hat die Gleichung $\boxed{|w+1+4i| = 4\sqrt{5}}$

Mittelpunkt ist $M'(-1-4i)$ und Radius $r' = 4\sqrt{5}$

Aufgabe 9

Gegeben ist die komplexe Abbildung $w = f(z) = (3+4i) \cdot z - 14 - 18i$.

Für w wird die Normalform w = u + i v (u, v reell) verwendet.

a) Auf welchen Punkt w (in Normalform) wird der Punkt z = 1 + 4i abgebildet?

b) Welcher Punkt z (in Normalform} wird auf den Punkt $w = 2 - 5i$ abgebildet?

c) Welche Fixpunkte (in Normalform) hat diese Abbildung?

d) Diese Abbildung kann als Drehstreckung um den Punkt $z_o = 5 - i$ aufgefasst werden.
Wie groß ist der Drehwinkel und wie groß der Streckfaktor?

e) Die imaginäre Achse der z-Ebene wird durch diese Abbildung auf ei[illegible] mit der Gleichung v = m u + q in der w-Ebene abgebildet. Berechnen S[illegible] die Zahlen m[illegible] q.

Lösung:

Aufgabe 10

Gegeben ist die komplexe Funktion $w = f(z) = i\cdot(z+\overline{z}) + i\cdot\frac{z-\overline{z}}{4}$.

a) Berechne die Fixpunkte von f.

b) Zeige, dass das Bild der Einheitskreises unter f eine Ellipse ist.
Berechne deren Gleichung und zeichne sie in die Gauß-Ebene.

Lösung:

a) Fixpunktbedingung: $f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad z = i\cdot(z+\overline{z}) + i\cdot\frac{z-\overline{z}}{4}$

$$x+iy = i(x+iy+x-iy) + i\cdot\frac{x+iy-x+iy}{4}$$

$$x+iy = i\cdot 2x + i\cdot\frac{iy}{2}$$

$$x+iy = i\cdot 2x - \tfrac{1}{2}y$$

$$\left(x+\tfrac{1}{2}y\right) + i\cdot(y-2x) = 0$$

Also muss sein: $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y = 0 \\ y-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x=0$ und $y=0$.

Ergebnis: Der Ursprung ist der einzige Fixpunkt.

b) Koordinatenform der Abbildungsgleichung:

$$w = i\cdot(z+\overline{z}) + i\cdot\frac{z-\overline{z}}{4} \Leftrightarrow u+iv = i(x+iy+x-iy) + \tfrac{1}{4}i(x+iy-x+iy)$$

$$u+iv = i\cdot 2x - \tfrac{1}{2}y$$

Koeffizientenvergleich: $\begin{cases} u = -\frac{1}{2}y \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2u \\ x=\frac{1}{2}v \end{cases}$

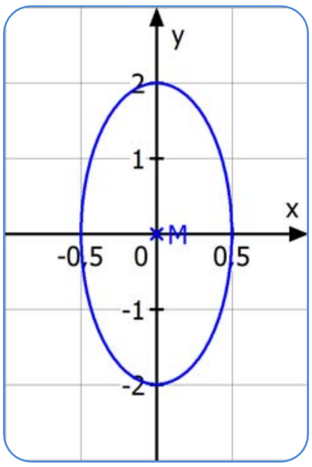
Urbild ist der Einheitskreis: $x^2+y^2=1$

Bildkurve: $\frac{v^2}{4} + 4u^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\frac{1}{4}} + \frac{v^2}{4} = 1$

Vergleichen mit der Ellipsenform: $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$

ergibt die Halbachsen $a = \tfrac{1}{2}$ und $b = 2$

mit dem Ellipsenmittelpunkt $\overline{M}(0\,|\,0)$.



Aufgabe 11

$$f(z) = \frac{-3+15i}{10} \cdot \overline{z} - \frac{5+3i}{10} z$$

a) Bestimme eine möglichst einfache Gleichung für das Bild der 1. Winkelhalbierenden in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Charakterisiere die Abbildung f.

Lösung: